Cuestiones propuestas de la primera prueba de la primera preparación

Temas 1 a 9 de Teórica Básica

Estas cuestiones van pensadas en la línea del primer examen

Su dificultad conjunta tiene un nivel similar a la línea del primer examen

Intenta hacerlas en una única vez y cuenta que como máximo tendrás 2 horas y 15 minutos. Incluyendo repasos...

Hacerlas sin calculadora

Son 30 cuestiones.

La finalidad principal de esta prueba es que veas lo que tardas y que tal te sale.

1. Sea un espacio muestral E formado por los sucesos S_1, S_2 y S_3 tales que

$$\mathbf{S_1 \cup S_2 \cup S_3 = E}$$
$$\mathbf{S_1 \cap S_3 = \phi}$$
$$\mathbf{S_2 \cap S_3 = \phi}$$

Donde

$$P(S_1) = \frac{2}{3}; \qquad P(S_1 \cup S_2) = \frac{3}{4}; \qquad P(S_3) = \frac{2}{7}$$

Verifíquese si en este espacio están bien definidas las probabilidades.

2. Una urna contiene 12 bolas de las cuales 6 son blancas, 4 negras y 2 rojas. Se extraen 5 bolas al azar sin reemplazamiento. Determínese:

a) **La probabilidad de obtener 3 bolas blancas.**
b) **Probabilidad de obtener 2 bolas blancas, 1 negra y 2 rojas.**

3. Se eligen al azar e independientemente dos números reales ξ y η dentro del intervalo [0,1]. Calcúlese

$$P\left(\frac{\xi}{2} < \eta < \frac{4}{3}\xi\right)$$

4. Verifíquese que la ley definida por

$$P(S_i) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n}; \qquad i = 0,1,2,\dots,n$$

siendo todos los sucesos S_i que forman el espacio muestral E disjuntos entre sí, es una verdadera ley de probabilidad.

5. El volumen de producción de una empresa es una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = e^{-x}$ **x** ≥ 0**.**

a) **Calcúlese su esperanza y varianza.**

Si sabemos que los costes totales vienen definidos por $C = 3x^3 - 27x^2 + 81x$

b) **Probabilidad de que el coste marginal sea mayor de 81.**
c) **Probabilidad de que la producción se encuentre por debajo del optimo de explotación (mínimo de los costes medios).**
d) **Probabilidad de que habiéndose alcanzado por lo menos un volumen de producción de 10 se alcance una producción al menos de 20.**

6. Sea la variable aleatoria ξ con función de densidad $f(x) = 2e^{-2x}$ **para x>0. Determínese:**

a) **Función característica.**
b) **Calcular la varianza utilizando la función característica.**
c) **La función característica de** $w = \frac{1}{2}\xi + 3$

7. El contenido de un bote de cerveza se distribuye normalmente con media 30 cl, y desviación típica de 2 cl.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que un bote determinado tenga más de 33 cl.?**
b) **En un envase de 6 botes, ¿cuál es la probabilidad de que el contenido líquido total sea inferior a un litro y tres cuartos?**

8. El peso en gramos de un melón se distribuye según una ley N(800;235). Se consideran tres categorías de esta fruta:

- **Tipo A con peso hasta 600 gramos.**
- **Tipo B con peso entre 600 y 1000 gramos.**
- **Tipo C con peso superior al kilogramo.**

Una frutería compra en el mercado central 1000 melones a un precio fijo de 215 pts./kg.

Si la clase A la vende a 300 pts./unidad, la B a 350 pts./unidad y la C a 400 pts./unidad, ¿cuál será el beneficio esperado en la venta de las 1000 unidades?

9. Sean cuatro variables aleatorias independientes ξ_i, todas con distribución de Poisson con media igual a 1/2 . Determínese P($t \leq 1$) siendo:

$$t = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_2}{4}$$

10. Un jugador de golf hace Eagle (hoyo en uno) en un par de hoyos (completar en dos golpes) el 5% de las ocasiones:

a) **Probabilidad de que tenga que realizar 6 intentos antes de hacer por primera vez un Eagle.**
b) **Probabilidad de que tenga que hacer 80 hoyos con par dos para lograr por tercera vez un Eagle.**
c) **Probabilidad de que el número de intentos fallidos antes de lograr el segundo Eagle sea como máximo uno.**

11. Se consideran dos números aleatorios elegidos uniformemente y con independencia dentro del intervalo [0,1].

1) **Calcular la probabilidad de que su diferencia sea mayor que 1/6.**
2) **Calcular la probabilidad de que su suma sea mayor que 1.**
3) **Calcular la probabilidad de que su producto sea mayor que 1/7.**

12. Sea una urna con 15 bolas rojas, 10 negras y 25 blancas. Se extraen 10 con reemplazamiento y al azar y se considera la variable aleatoria (ξ, η) donde ξ es "número de rojas" y η es "número de negras".

1) **Calcular la función de probabilidad conjunta.**
2) **Hallar las funciones de distribución marginales.**

13. ¿Cuál es el mínimo número de alumnos que debe tener una clase para garantizar una probabilidad 0,5 de que el día de cumpleaños de algún alumno coincida con el día de cumpleaños del rector de la universidad? Se asume que los años son de 365 días.

14. Una caja contiene ocho bolas rojas, tres blancas y nueve azules. Si se sacan tres bolas al azar, determinar la probabilidad de que:

1) **las tres sean rojas;**
2) **las tres sean blancas;**
3) **dos sean rojas y una blanca;**
4) **al menos una sea blanca;**

5) **sean una de cada color;**
6) **salgan en el orden roja, blanca, azul.**

15. Sea (ξ, η) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recinto:

$$C = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 < 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

1) **Calcular las funciones de densidad marginales.**
2) **Calcular las funciones de densidad condicionadas.**

16. Sea $X = (X_1, X_2, X_3)'$ un vector aleatorio tridimensional que sigue una distribución normal con media $\mu = (1, 0, -2)'$ y matriz de varianzas-covarianzas

$$\sum = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) **Escríbase la forma cuadrática $Q(x_1, x_2, x_3)$ del exponente de la densidad del vector aleatorio X.**
b) **Escríbase la matriz de covarianzas cruzadas entre $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix}$ y X_2.**
c) **Encuéntrese la correlación entre X_1 y X_3 condicionadas por $X_2 = x_2$.**
d) **Hállese $var(X_1|X_2 = x_2)$ y compárese con $var(X_1)$.**

17. Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sean las variables aleatorias: X = "número de caras en las tres tiradas" e Y = "diferencia en valor absoluto entre el número de caras y el de escudos en las tres tiradas". Se pide:

a) **Distribución de probabilidad de (X, Y).**
b) **Media y desviación típica de las distribuciones marginales de X e Y.**
c) **Covarianza y coeficiente de correlación.**
d) **¿Son X e Y independientes?**
e) **Distribución condicionada de X a Y = 3.**
f) **Distribución condicionada de Y a X = 2.**
g) **$P[X \leq 1; Y > 0]$, $P[X \geq 2]$, $P[Y < 3]$**

18. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} k & 0<y<x<1 \\ 0 & restantes \quad valores \end{cases}$$

a) **Hallar k para que sea función de densidad.**
b) **Hallar las funciones de densidad marginales. ¿Son X e Y independientes?**
c) **Hallar las funciones de distribución marginales.**
d) **Hallar las funciones de densidad condicionadas.**

19. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & |y|<x \quad ; \quad 0<x<1 \\ 0 & restantes \quad valores \end{cases}$$

a) **Comprobar que f(x,y) es función de densidad.**

b) **Hallar las medias de X e Y.**

c) **Hallar las probabilidades:** $P\left[X<\frac{1}{2};Y<0\right]$ $\quad y \quad$ $P\left[X>\frac{1}{2};-\frac{1}{2}<Y<\frac{1}{2}\right]$

20. La función de distribución asociada a un fenómeno de la naturaleza es:

$$F(x,y)=\begin{cases} \left(1-e^{-x}\right)\cdot\left(1-e^{-y}\right) & x>0 \quad , \quad y>0 \\ 0 & en \quad el \quad resto \end{cases}$$

a) **Hallar la función de densidad.**

b) **Hallar las funciones de densidad marginales de X e Y**

c) **Hallar las funciones de densidad condicionadas.**

d) **Calcular el coeficiente de correlación.**

21. Definir el teorema de Bayes e indicar cuales son las probabilidades a priori y cuales a posteriori.

22. Que es la función de densidad y que relación guarda con la de cuantía. Realizar un gráfico que relacione a ambas.

23. Definir esperanza y sus propiedades.

24. Que es la función generatriz de momentos. Que ventaja tiene y en que propiedad se basa.

25. Relación entre las distribuciones Binomial, Geométrica y Poisson.

26. Independencia entre variables aleatoria. Que diferencia existe entre independencia estadística y lineal.

27. Qué es una transformación lineal de variables aleatorias y para qué sirve.

28. Definir la esperanza marginal y condicionada en una distribución bidimensional continua de probabilidad.

29. Definir la distribución condicionada en un normal bivariante.

30. Definir la normal multivariante.